Популярные лекции
ПО МАТЕМАТИКЕ

А. И. МАРКУШЕВИЧ

ВОЗВРАТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
1950

Огонек.

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

А. И. МАРКУШЕВИЧ

ВОЗВРАТНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1950 ЛЕНИНГРАД

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой брошюре содержится расширенное изложение лекции, читанной автором для школьников IX и X классов — участников Московской математической олимпиады, а затем — в несколько изменённом виде — в Московском институте усовершенствования учителей.

Тема «Возвратные последовательности» близка к школьному курсу (арифметические и геометрические прогрессии, последовательность квадратов натуральных чисел, последовательности коэффициентов частного многочленов, расположенных по возрастающим степеням, и т. п.). Вместе с тем это настоящая маленькая математическая теория*), законченная, простая, ясная, как и всё то, что вышло из рук крупнейших мастеров математического анализа, создавших эту теорию.

Основы теории возвратных последовательностей были разработаны и опубликованы в двадцатых годах восемнадцатого века французским математиком Муавром [имя которого носит формула: $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$] и одним из первых по времени членов Петербургской Академии наук швейцарским математиком Даниилом Бернулли. Развёрнутую теорию дал крупнейший математик восемнадцатого века петербургский академик Леонард Эйлер, посвятивший возвратным

*) Для искушённого в математическом анализе читателя мы укажем, что это точный аналог теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

последовательностям (рядам) тринадцатую главу своего «Введения в анализ бесконечно-малых» (1748)*). Из более поздних работ следует выделить изложение теории возвратных последовательностей в курсах исчисления конечных разностей, читанных знаменитыми русскими математиками академиками П. Л. Чебышевым и А. А Марковым**).

---

*) См. русский перевод первого тома этого труда, написанного Эйлером на латинском языке: Л. Эйлер, Введение в анализ бесконечно-малых, т. I, М. — Л., 1936, стр. 197—218.

**) См. П. Л. Чебышев, Теория вероятностей, лекции 1879—1880 гг., М.—Л., 1936, стр. 139—147; А. А. Марков, Исчисление конечных разностей, 2-е изд., Одесса, 1910, стр. 209—239.

1. Понятие возвратной последовательности является широким обобщением понятия арифметической или геометрической прогрессии. Как частные случаи оно охватывает также последовательности квадратов или кубов натуральных чисел, последовательности цифр десятичного разложения рационального числа (и вообще любые периодические последовательности), последовательности коэффициентов частного от деления двух многочленов, расположенных по возрастающим степеням x, и т. д. Отсюда видно, что с возвратными последовательностями в курсе математики средней школы приходится встречаться весьма часто. Теория возвратных последовательностей составляет особую главу математической дисциплины, называемой *исчислением конечных разностей*. Мы изложим здесь эту теорию, не требуя от читателя каких-либо предварительных специальных сведений (лишь в одном месте мы сошлёмся без доказательства на общее предложение, устанавливаемое в теории линейных алгебраических уравнений).

2. Будем записывать последовательности в виде

$$u_1,\ u_2,\ u_3,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots, \tag{1}$$

или, коротко, $\{u_n\}$. Если существует натуральное число k и числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (действительные или мнимые), такие, что, начиная с некоторого номера n и для всех следующих номеров,

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\ldots+a_ku_n \quad (n \geqslant m \geqslant 1), \tag{2}$$

то последовательность (1) называется *возвратной последовательностью порядка* k, а соотношение (2) — *возвратным уравнением порядка* k.

Таким образом, возвратная последовательность характеризуется тем, что каждый член её (начиная с некоторого из них) выражается через одно и то же количество k непосредственно предшествующих ему членов по формуле (2). Самое название «возвратная» (а также рекуррентная, от французского récurrente — возвращающаяся к началу) употребляется именно потому, что здесь для вычисления последующего члена возвращаются к предшествующим членам. Приведём несколько примеров возвратных последовательностей.

Пример 1. Геометрическая прогрессия. Пусть имеем геометрическую прогрессию:

$$u_1 = a, \quad u_2 = aq, \quad u_3 = aq^2, \ldots, u_n = aq^{n-1}, \ldots; \tag{3}$$

для неё уравнение (2) принимает вид:

$$u_{n+1} = qu_n. \tag{4}$$

Здесь $k = 1$ и $a_1 = q$. Таким образом геометрическая прогрессия является возвратной последовательностью первого порядка.

Пример 2. Арифметическая прогрессия. В случае арифметической прогрессии

$$u_1 = a,\ u_2 = a + d,\ u_3 = a + 2d, \ldots, u_n = a + (n-1)d, \ldots$$

имеем:

$$u_{n+1} = u_n + d$$

— соотношение, не имеющее вида уравнения (2)*). Однако, если мы рассмотрим два соотношения, написанные для двух соседних значений n:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + d \quad \text{и} \quad u_{n+1} = u_n + d,$$

то получим из них, путём почленного вычитания:

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n,$$

или

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n \tag{5}$$

— уравнение вида (2). Здесь $k = 2$, $a_1 = 2$, $a_2 = -1$. Следовательно, арифметическая прогрессия является возвратной последовательностью второго порядка.

*) Для последнего характерно то, что в правую часть его входят одни только члены последовательности с постоянными коэффициентами при них.

Пример 3. Рассмотрим старинную задачу Фибоначчи*) о числе кроликов. В ней требуется определить число пар зрелых кроликов, образовавшихся от одной пары в течение года, если известно, что каждая зрелая пара кроликов ежемесячно рождает новую пару, причём новорождённые достигают полной зрелости в течение месяца. В этой задаче интересен отнюдь не результат, получить который совсем нетрудно, но последовательность, члены которой выражают общее число зрелых пар кроликов в начальный момент (u_1), через месяц (u_2), через два месяца (u_3) и, вообще, через n месяцев (u_{n+1}). Очевидно, что $u_1 = 1$. Через месяц прибавится пара новорождённых, но число зрелых пар будет прежнее: $u_2 = 1$. Через два месяца крольчата достигнут зрелости и общее число зрелых пар будет равно двум: $u_3 = 2$. Пусть мы вычислили уже количество зрелых пар через $n-1$ месяцев — u_n и через n месяцев — u_{n+1}. Так как к этому времени u_n ранее имевшихся зрелых пар дадут ещё u_n пар приплода, то через $n+1$ месяцев общее число зрелых пар будет:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \tag{6}$$

Отсюда

$$u_4 = u_3 + u_2 = 3, \quad u_5 = u_4 + u_3 = 5, \quad u_6 = u_5 + u_4 = 8,$$
$$u_7 = u_6 + u_5 = 13, \dots$$

Мы получили таким образом последовательность

$$\left.\begin{aligned} &u_1 = 1, \quad u_2 = 1, \quad u_3 = 2, \quad u_4 = 3, \\ &u_5 = 5, \quad u_6 = 8, \quad u_7 = 13, \dots, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

в которой каждый последующий член равен сумме двух предыдущих. Последовательность эта называется *последовательностью Фибоначчи*, а члены её — *числами Фибоначчи*. Уравнение (6) показывает, что последовательность Фибоначчи есть возвратная последовательность второго порядка.

Пример 4. В качестве следующего примера рассмотрим последовательность квадратов натуральных чисел:

$$u_1 = 1^2, \quad u_2 = 2^2, \quad u_3 = 3^2, \dots, \quad u_n = n^2, \dots \tag{8}$$

---

*) Фибоначчи, или Леонардо Пизанский, — итальянский средневековый математик (около 1200 г.) — оставил после себя книгу «Об абаке» (Liber abaci), содержащую обширные арифметические и алгебраические сведения, заимствованные у народов Средней Азии и византийцев и творчески им переработанные и развитые.

Здесь $u_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1$ и, следовательно,

$$u_{n+1}=u_n+2n+1. \tag{9}$$

Увеличивая n на единицу, получим:

$$u_{n+2}=u_{n+1}+2n+3. \tag{10}$$

И, следовательно [вычитая почленно (9) из (10)],

$$u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n+2,$$

или

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n+2. \tag{11}$$

Увеличивая в равенстве (11) n на единицу, будем иметь:

$$u_{n+3}=2u_{n+2}-u_{n+1}+2; \tag{12}$$

откуда [вычитая почленно (11) из (12)]

$$u_{n+3}-u_{n+2}=2u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n,$$

или

$$u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n. \tag{13}$$

Мы получили возвратное уравнение третьего порядка. Следовательно, последовательность (8) есть возвратная последемовательность третьего порядка. Подобным же образом дожно убедиться в том, что последовательность кубов натуральных чисел

$$1^3,\ 2^3,\ 3^3, \ldots, n^3, \ldots \tag{14}$$

есть возвратная последовательность четвёртого порядка. Члены её удовлетворяют уравнению

$$u_{n+4}=4u_{n+3}-6u_{n+2}+4u_{n+1}-u_n, \tag{15}$$

которое предлагаем вывести читателю.

Пример 5. К возвратным относятся все периодические последовательности. Рассмотрим, например, последовательность цифр десятичного разложения числа

$$\frac{761}{1332}=0{,}57132132132\ldots$$

Здесь

$$\left.\begin{array}{llll} u_1=5, & u_2=7, & u_3=1, & u_4=3, \\ u_5=2, & u_6=1, & u_7=3, \ldots & \end{array}\right\} \tag{16}$$

Очевидно, что

$$u_{n+3}=u_n \qquad (n\geqslant 3). \tag{17}$$

Чтобы представить это уравнение в виде (2), перепишем его следующим образом:

$$u_{n+3}=0\cdot u_{n+2}+0\cdot u_{n+1}+1\cdot u_n.$$

Отсюда видно, что это возвратное уравнение третьего порядка ($k=3$, $a_1=0$, $a_2=0$, $a_3=1$). Итак, последовательность (16) есть возвратная последовательность третьего порядка.

Пример 6. Рассмотрим теперь последовательность коэффициентов частного от деления двух многочленов, расположенных по возрастающим степеням x. Пусть

$$P(x)=A_0+A_1x+\ldots+A_lx^l$$

и

$$Q(x)=B_0+B_1x+\ldots+B_kx^k \qquad (B_0\neq 0).$$

Будем делить $P(x)$ на $Q(x)$; если $P(x)$ не делится на $Q(x)$ без остатка, то деление можно продолжать неограниченно. В частном один за другим будут получаться члены:

$$D_0+D_1x+D_2x^2+D_3x^3+\ldots+D_nx^n+\ldots$$

Рассмотрим последовательность

$$u_1=D_0,\quad u_2=D_1,\ \ldots,\ u_n=D_{n-1},\ \ldots \tag{18}$$

и докажем, что она является возвратной порядка k (напомним, что k есть степень делителя). Для этой цели фиксируем произвольное натуральное число n, удовлетворяющее единственному условию $n\geqslant l-k+1$, и остановимся в процессе деления на члене частного, содержащем x^{n+k}. Тогда в остатке получится некоторый многочлен $R(x)$, содержащий x в степенях выше, чем $n+k$. Записывая соотношение между делимым, делителем, частным и остатком, получим следующее тождество:

$$A_0+\ldots+A_lx^l=$$
$$=(B_0+\ldots+B_kx^k)\cdot(D_0+\ldots+D_{n+k}x^{n+k})+R(x).$$

Найдём коэффициенты при x^{n+k} в левой и правой частях этого тождества и приравняем их между собой. Так как $n+k\geqslant l+1$, то коэффициент при x^{n+k} в левой части равен нулю. Поэтому должен равняться нулю и коэффициент при x^{n+k} в правой части. Но члены с x^{n+k} содержатся здесь только в произведении $(B_0+\ldots+B_kx^k)\cdot(D_0+\ldots+D_{n+k}x^{n+k})$ [остаток $R(x)$, как мы указывали, содержит x в более высоких степенях]. Поэтому искомый коэффициент есть

$$D_{n+k}B_0+D_{n+k-1}B_1+\ldots+D_nB_k; \qquad (19)$$

по предыдущему он должен равняться нулю:

$$D_{n+k}B_0+D_{n+k-1}B_1+\ldots+D_nB_k=0,$$

откуда (вспомним, что $B_0\neq 0$)

$$D_{n+k}=-\frac{B_1}{B_0}D_{n+k-1}-\ldots-\frac{B_k}{B_0}D_n \quad (n\geqslant l-k+1). \qquad (20)$$

Это — возвратное уравнение порядка k, откуда и следует, что последовательность (18) есть возвратная последовательность порядка k.

3. Из всех рассмотренных примеров наиболее общий характер имеет пример 6. Покажем, что *произвольная возвратная последовательность порядка k*

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots, \qquad (21)$$

удовлетворяющая уравнению вида

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+\ldots+a_ku_n \qquad (n\geqslant m\geqslant 1), \qquad (22)$$

совпадает с последовательностью коэффициентов частного, полученного от деления некоторого многочлена $P(x)$ на многочлен

$$Q(x)=1-a_1x-\ldots-a_kx^k. \qquad (23)$$

Пусть n — произвольное натуральное число, удовлетворяющее условию $n>k+m-2$; умножим многочлен $Q(x)$ на $u_1+u_2x+u_3x^2+\ldots+u_{n+1}x^n$. Получим:

$$\begin{aligned}&(1-a_1x-a_2x^2-\ldots-a_kx^k)(u_1+u_2x+\\&\qquad+\ldots+u_{k+m-1}x^{k+m-2}+\ldots+u_{n+1}x^n)=\\&\qquad=[u_1+(u_2-a_1u_1)x+\ldots+\\&+(u_{k+m-1}-a_1u_{k+m-2}-\ldots-a_ku_{m-1})x^{k+m-2}]+\\&+[(u_{k+m}-a_1u_{k+m-1}-\ldots-a_ku_m)x^{k+m-1}+\\&+\ldots+(u_{n+1}-a_1u_n-\ldots-a_ku_{n-k+1})x^n]-\\&-[(a_1u_{n+1}+\ldots+a_ku_{n-k+2})x^{n+1}+\ldots+a_ku_{n+1}x^{n+k}].\end{aligned} \qquad (24)$$

Здесь в первой квадратной скобке находится многочлен степени не выше $l=k+m-2$, коэффициенты которого не зависят от взятого нами числа n; мы обозначим его через $P(x)$:

$$P(x)=u_1+(u_2-a_1u_1)x+$$
$$+\ldots+(u_{k+m-1}-a_1u_{k+m-2}-\ldots-a_ku_{m-1})x^{k+m-2}. \quad (25)$$

В следующей квадратной скобке находится многочлен, все коэффициенты которого равны нулю, в силу равенства (22). Наконец, в последней квадратной скобке заключается многочлен, коэффициенты которого зависят от n; он не содержит членов степени ниже $n+1$. Обозначая его через $R_n(x)$, перепишем тождество (24) в виде

$$P(x)=(1-a_1x-a_2x^2-\ldots-a_kx^k)(u_1+u_2x+$$
$$+\ldots+u_{n+1}x^n)+R_n(x). \quad (26)$$

Отсюда видно, что $u_1+u_2x+\ldots+u_{n+1}x^n$ представляет частное, а $R_n(x)$ — остаток от деления $P(x)$ на

$$Q(x)=1-a_1x-a_2x^2-\ldots-a_kx^k,$$

т. е.

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ u_{n+1},\ \ldots,$$

действительно является последовательностью коэффициентов частного, получаемого от деления многочлена (25) на (23).

В виде примера рассмотрим последовательность Фибоначчи:

$$u_1=1,\quad u_2=1,\quad u_3=2,\quad u_4=3,\quad u_5=5,\ \ldots$$

Так как её члены удовлетворяют уравнению

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n \qquad (n\geqslant 1),$$

то здесь $m=1$, $k=2$, $a_1=1$, $a_2=1$ и $Q(x)=1-x-x^2$.

Многочлен $P(x)$ должен иметь степень не выше $k+m-2=1$. По формуле (25) получаем:

$$P(x)=1+(1-1\cdot 1)x=1.$$

Итак, числа Фибоначчи совпадают с последовательностью коэффициентов частного от деления 1 на $1-x-x^2$.

4. Один из вопросов, который приходится решать в курсе средней школы относительно арифметической и геометрической прогрессий, а также последовательности квадратов натуральных чисел, заключается в отыскании суммы n членов каждой из этих последовательностей.

Пусть, вообще,

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots \qquad (27)$$

— возвратная последовательность порядка k, члены которой удовлетворяют уравнению:

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\ldots+a_ku_n \qquad (n\geqslant m). \qquad (28)$$

Рассмотрим новую последовательность, образованную суммами s_n чисел (27):

$$s_1=u_1,\quad s_2=u_1+u_2,\ldots,\quad s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n,\ldots, \qquad (29)$$

и покажем, что эта последовательность сумм является также возвратной, порядка $k+1$, причём её члены удовлетворяют уравнению

$$\begin{gathered}s_{n+k+1}=(1+a_1)s_{n+k}+\\+(a_2-a_1)s_{n+k-1}+\ldots+(a_k-a_{k-1})s_{n+1}-a_ks_n.\end{gathered} \qquad (30)$$

Для доказательства заметим, что

$$\left.\begin{array}{c}u_1=s_1,\ u_2=s_2-u_1=s_2-s_1,\ \ldots\\ \ldots,u_n=s_n-(u_1+\ldots+u_{n-1})=s_n-s_{n-1},\ \ldots\end{array}\right\} \qquad (31)$$

Полагая $s_0=0$ так, что $u_1=s_1-s_0$, и подставляя в уравнение (28) вместо $u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots$ их выражения через $s_0,\ s_1,\ \ldots,\ s_n,\ \ldots$, получим:

$$\begin{gathered}s_{n+k}-s_{n+k-1}=a_1(s_{n+k-1}-s_{n+k-2})+\\+a_2(s_{n+k-2}-s_{n+k-3})+\ldots+a_k(s_n-s_{n-1}),\end{gathered}$$

откуда

$$\begin{gathered}s_{n+k}=(1+a_1)s_{n+k-1}+\\+(a_2-a_1)s_{n+k-2}+\ldots+(a_k-a_{k-1})s_n-a_ks_{n-1} \quad (n\geqslant m),\end{gathered}$$

или, заменяя здесь n через $n+1$:

$$\begin{gathered}s_{n+k+1}=(1+a_1)s_{n+k}+(a_2-a_1)s_{n+k-1}+\ldots+\\+(a_k-a_{k-1})s_{n+1}-a_ks_n \qquad (n\geqslant m-1).\end{gathered}$$

Это — возвратное уравнение порядка $k+1$.

Приведём несколько примеров:

а) Геометрическая прогрессия. Здесь $u_n=aq^{n-1}$ и $s_n=u_1+u_2+\ldots+u_n=a+aq+\ldots+aq^{n-1}$. Так как члены $\{u_n\}$ удовлетворяют уравнению вида $u_{n+1}=qu_n$, то члены $\{s_n\}$ должны удовлетворять уравнению

$$s_{n+2}=(1+q)s_{n+1}-qs_n. \qquad (32)$$

б) Последовательность квадратов натуральных чисел. Здесь $u_n=n^2$ и $s_n=1+2^2+\ldots+n^2$. Так как члены $\{u_n\}$ удовлетворяют уравнению

$$u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n$$

(см. стр. 8), то члены $\{s_n\}$ удовлетворяют уравнению вида

$$s_{n+4}=4s_{n+3}-6s_{n+2}+4s_{n+1}-s_n.$$

в) Числа Фибоначчи. Так как они удовлетворяют уравнению

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,$$

то суммы их s_n должны удовлетворять уравнению

$$s_{n+3}=2s_{n+2}-s_n.$$

5. В случае простейших возвратных последовательностей, например арифметической и геометрической прогрессий, последовательности квадратов или кубов натуральных чисел, а также периодической последовательности, мы можем находить любой член последовательности, не прибегая к вычислению предшествующих членов. В случае же последовательности чисел Фибоначчи или общей последовательности коэффициентов частного от деления двух многочленов, мы, на первый взгляд, не имеем возможности для этого, и чтобы вычислить тринадцатое число Фибоначчи u_{13}, находим предварительно, один за другим, все предшествующие члены (пользуясь уравнением $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$):

$$u_1=1,\quad u_2=1,\quad u_3=2,\quad u_4=3,\quad u_5=5,\quad u_6=8,$$
$$u_7=13,\quad u_8=21,\quad u_9=34,\quad u_{10}=55,\quad u_{11}=89,$$
$$u_{12}=144,\quad u_{13}=233.$$

Займёмся теперь детальным исследованием структуры членов возвратной последовательности и в результате получим формулы, позволяющие вычислять в самом общем случае любой член возвратной последовательности, не прибегая к вычислению предшествующих членов. Формулы эти можно будет рассматривать, как далеко идущие обобщения формул для общего члена арифметической или геометрической прогрессий.

Пусть

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\ldots+a_ku_n \tag{33}$$

— возвратное уравнение порядка k. Если оно выполняется для всех натуральных значений $n=1, 2, 3, \ldots$, то, положив $n=1$, получим:

$$u_{k+1}=a_1u_k+a_2u_{k-1}+\ldots+a_ku_1.$$

Итак, зная $u_1, u_2, \ldots, u_k$, можно вычислить u_{k+1}. Полагая затем в уравнении (33) $n=2$, найдём:

$$u_{k+2}=a_1u_{k+1}+a_2u_k+\ldots+a_ku_2.$$

Следовательно, нам известно теперь и значение u_{k+2}. Вообще, если m — какое-либо натуральное число, и мы вычислили уже члены последовательности

$$u_1, u_2, \ldots, u_k, u_{k+1}, \ldots, u_{m+k-1},$$

то, полагая в уравнении (33) $n=m$, мы найдём из него следующий член u_{m+k}.

Итак, члены возвратной последовательности порядка k, удовлетворяющей уравнению (33), определяются единственным образом с помощью этого уравнения, если известны первые k членов последовательности: $u_1, u_2, \ldots, u_k$. Выбирая их различными способами (этот выбор не связан никакими ограничениями), можем получить бесконечное множество различных последовательностей, удовлетворяющих уравнению (33). Их различие между собой будет проявляться уже в первых k членах (по крайней мере, в одном из них) и будет обнаруживаться также и в дальнейших членах.

Так, например, уравнению первого порядка

$$u_{n+1}=qu_n$$

удовлетворяют всевозможные геометрические прогрессии со знаменателем q (они различаются друг от друга значениями первого члена u_1); уравнению второго порядка

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n$$

(или $u_{n+2}-u_{n+1}=u_{n+1}-u_n$) удовлетворяют всевозможные арифметические прогрессии, различающиеся друг от друга, по крайней мере в одном из членов $u_1=a$ и $u_2=a+d$, и, следовательно, различающиеся либо значением первого члена (a), либо значением разности (d), либо тем и другим вместе.

Рассмотрим ещё уравнение второго порядка

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

Ему, кроме последовательности Фибоначчи:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ \ldots,$$

характеризующейся тем, что здесь $u_1=u_2=1$, удовлетворяет ещё бесконечное множество других последовательностей, получающихся при различном выборе значений u_1 и u_2. Так, например, при $u_1 = -3$ и $u_2 = 1$ получаем последовательность:

$$-3,\ 1,\ -2,\ -1,\ -3,\ -4,\ -7,\ -11,\ -18,\ -29,\ \ldots$$

Пусть мы имеем некоторое количество последовательностей, удовлетворяющих одному и тому же уравнению (33):

$$\left.\begin{array}{l} x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots, \\ y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n,\ \ldots \end{array}\right\} \quad (34)$$

Тогда выполняются уравнения:

$$\left.\begin{array}{l} x_{n+k} = a_1 x_{n+k-1} + a_2 x_{n+k-2} + \ldots + a_k x_n, \\ y_{n+k} = a_1 y_{n+k-1} + a_2 y_{n+k-2} + \ldots + a_k y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_{n+k} = a_1 z_{n+k-1} + a_2 z_{n+k-2} + \ldots + a_k z_n. \end{array}\right\} \quad (35)$$

Возьмём произвольные числа A, B, ..., C, по числу последовательностей (34), умножим все члены первого из уравнений (35) на A, второго на B, ..., последнего на C и сложим. Тогда получим равенство:

$$\begin{aligned} Ax_{n+k} + By_{n+k} + \ldots + Cz_{n+k} = \\ = a_1 (Ax_{n+k-1} + By_{n+k-1} + \ldots + Cz_{n+k-1}) + \\ + a_2 (Ax_{n+k-2} + By_{n+k-2} + \ldots + Cz_{n+k-2}) + \\ + \ldots + a_k (Ax_n + By_n + \ldots + Cz_n). \end{aligned} \quad (36)$$

Из него следует, что последовательность

$$\left.\begin{array}{l} t_1 = Ax_1 + By_1 + \ldots + Cz_1, \\ t_2 = Ax_2 + By_2 + \ldots + Cz_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_n = Ax_n + By_n + \ldots + Cz_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \quad (37)$$

получающаяся из последовательностей (34) путём умножения всех членов первой из них на A, второй на B, ..., последней на C и затем почленного сложения последовательностей (первых членов с первыми, вторых со вторыми и т. д.), удовлетворяет данному уравнению (33). Пользуясь произволом в выборе чисел A, B, ..., C, мы можем, изменяя эти числа, получать, вообще говоря, различные значения членов t_1, t_2, t_3, ...

Пусть теперь

$$u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n,\ \ldots \tag{38}$$

— какая-либо последовательность, удовлетворяющая уравнению (33); спрашивается, нельзя ли придать числам $A, B, \ldots, C$ такие значения, чтобы первые k членов последовательности (37) совпали бы с первыми k членами последовательности (38)? Если это удастся, то по предыдущему совпадут и все члены последовательностей (37) и (38), т. е. мы будем иметь при любом натуральном n:

$$u_n = Ax_n + By_n + \ldots + Cz_n. \tag{39}$$

Таким образом, перед нами открывается возможность (пока гипотетическая) представлять любую из бесконечного множества последовательностей, удовлетворяющих одному и тому же возвратному уравнению порядка k, через некоторые из них (34), по формуле (39). Реализация этой возможности зависит от того, возможно ли подобрать числа $A, B, \ldots, C$ так, чтобы удовлетворялись уравнения:

$$\left.\begin{aligned} Ax_1 + By_1 + \ldots + Cz_1 &= u_1, \\ Ax_2 + By_2 + \ldots + Cz_2 &= u_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ax_k + By_k + \ldots + Cz_k &= u_k \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

с произвольно заданными значениями правых частей $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Так как неизвестными здесь являются числа $A, B, \ldots, C$, а число уравнений равно порядку k возвратного уравнения, то отсюда следует, что и количество неизвестных $A, B, \ldots, C$ [а оно совпадает с количеством последовательностей (34)], целесообразно взять также равным k. Мы знаем, что наличие решений у системы k алгебраических уравнений (40) с k неизвестными $A, B, \ldots, C$ зависит от того, каковы коэффициенты этой системы: $x_1, y_1, \ldots, z_1, \ldots, x_k, y_k, \ldots, z_k$, т. е. от того, каковы начальные члены последовательностей (34). Решение наверное будет существовать, при произвольных правых частях $u_1, u_2, \ldots, u_k$, если мы положим, например,

$$\left.\begin{aligned} &x_1 = 1,\ y_1 = 0,\ \ldots,\ z_1 = 0; \\ &x_2 = 0,\ y_2 = 1,\ \ldots,\ z_2 = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &x_k = 0,\ y_k = 0,\ \ldots,\ z_k = 1. \end{aligned}\right\} \tag{41}$$

В самом деле, в этом случае система (40) принимает простейший вид, сразу обнаруживающий решение системы

$$\left.\begin{aligned} A&=u_1,\\ B&=u_2,\\ \dots&\dots\\ C&=u_k. \end{aligned}\right\}$$

Конечно, возможен и иной выбор чисел

$$x_1,\ \dots,\ z_1,\ \dots,\ x_k,\ \dots,\ z_k,$$

при котором система (40) имеет решение, каковы бы ни были правые части уравнений. Например, положим

$$\left.\begin{array}{l} x_1=1,\ y_1=1,\ \dots,\ z_1=1;\\ x_2=0,\ y_2=1,\ \dots,\ z_2=1;\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_k=0,\ y_k=0,\ \dots,\ z_k=1. \end{array}\right\} \qquad (42)$$

Тогда система примет вид:

$$\left.\begin{array}{r} A+B+\dots+C=u_1,\\ B+\dots+C=u_2,\\ \dots\dots\\ C=u_k, \end{array}\right\}$$

откуда последовательно получаем:

$$C=u_k,\ \dots,\quad B=u_2-u_3,\quad A=u_1-u_2.$$

Обращаясь к общему случаю, формулируем следующую теорему:

Для того чтобы система k линейных алгебраических уравнений (40) с k неизвестными имела решение A, B, ..., C и притом единственное, при любых значениях правых частей u_1, u_2, ..., u_k, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая ей однородная система

$$\left.\begin{array}{l} Ax_1+By_1+\dots+Cz_1=0,\\ Ax_2+By_2+\dots+Cz_2=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\\ Ax_k+By_k+\dots+Cz_k=0 \end{array}\right\} \qquad (40')$$

имела бы одно только нулевое решение*):

$$A = B = \ldots = C = 0.$$

Читатель легко проверит, что условие этой теоремы выполняется в частных случаях (41) и (42). В дальнейшем мы столкнёмся со случаями, в которых высказанное предложение окажется полезным. Пока же будем просто опираться на тот факт (установленный независимо от последней теоремы), что всегда существуют числа $x_1, \ldots, z_1, \ldots, x_k, \ldots, z_k$ [начальные члены последовательностей (34)], такие, что система уравнений (40) имеет решения при любых $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Если числа такого рода выбраны в качестве начальных членов последовательностей (34), то, по предыдущему, любая последовательность, удовлетворяющая возвратному уравнению (33), выразится по формуле (39), где числа $A, B, \ldots, C$ определяются из уравнений (40). Система k последовательностей (34), через которые члены любой последовательности, удовлетворяющей данному уравнению (33), выражаются по формулам (39) (т. е. путём умножения на некоторые числа $A, B, \ldots, C$ и сложения), называется *базисом* возвратного уравнения.

Из изложенного следует, что каждое уравнение обладает базисом, который можно выбирать по-разному. Например,

---

*) Указанное предложение удобно тем, что оно не требует для своего применения знакомства с теорией определителей. Для читателя, знакомого с этой теорией, напомним, что для существования решения системы (40), при любых значениях правых частей этих уравнений, необходимо и достаточно, чтобы определитель системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & \ldots & z_1 \\ x_2 & y_2 & \ldots & z_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n & y_n & \ldots & z_n \end{vmatrix}$$

был отличен от нуля. Это же условие необходимо и достаточно для того, чтобы решение системы (40) являлось единственным при каких-либо фиксированных правых частях (например, равных нулю). Таким образом для системы k линейных уравнений с k неизвестными условия существования решения при любых правых частях совпадают с условиями единственности решения при нулевых правых частях. Именно этот факт и выражен в предложении, приведённом в тексте.

системы с начальными членами:

$$\underbrace{\left.\begin{matrix} 1, 0, \ldots, 0 \\ 0, 1, \ldots, 0 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, 0, \ldots, 1 \end{matrix}\right\}}_{(k)} \quad \text{или} \quad \underbrace{\left.\begin{matrix} 1, 1, \ldots, 1 \\ 0, 1, \ldots, 1 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ 0, 0, \ldots, 1 \end{matrix}\right\}}_{(k)}$$

образуют базис произвольного возвратного уравнения порядка k.

Подведём итоги сказанному в п. 5.

Для каждого возвратного уравнения порядка k существует бесконечное множество различных, удовлетворяющих ему последовательностей. Любую из них можно составить из k последовательностей, удовлетворяющих этому уравнению и образующих его базис, путём умножения каждой из k последовательностей соответственно на некоторые числа $A, B, \ldots, C$ и почленного сложения.

Таким образом для полного решения возвратного уравнения порядка k достаточно найти лишь конечное число k удовлетворяющих ему последовательностей, образующих базис этого уравнения.

Поясним сказанное примерами.

Пример 1. Пусть дано возвратное уравнение второго порядка:

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n.$$

Его базис должен состоять из двух последовательностей:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots,$$
$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n,\ \ldots$$

Мы выберем их, положив

$$x_1 = 1, \quad x_2 = 1 \quad \text{и} \quad y_1 = 0, \quad y_2 = 1.$$

Так как возвратное уравнение, переписанное в виде

$$u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n,$$

показывает, что разность соседних членов последовательности является постоянной, т. е. что последовательность, удовлетворяющая данному уравнению, необходимо является арифметической прогрессией, то в случае последовательности $\{x_n\}$ с начальными членами $x_1 = 1$ и $x_2 = 1$ мы получаем арифметическую прогрессию с разностью нуль, т. е.

$$1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ \ldots \qquad (x_n = 1),$$

а в случае последовательности $\{y_n\}$ с начальными членами $y_1=0$ и $y_2=1$ — арифметическую прогрессию с разностью, равной единице, т. е.

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ \ldots \qquad (y_n=n-1).$$

По формуле (39) член любой возвратной последовательности, удовлетворяющей данному уравнению, может быть представлен в виде

$$u_n=Ax_n+By_n=A+B\ (n-1),$$

где A и B должны быть определены из уравнений:

$$u_1=A+B(1-1),$$
$$u_2=A+B(2-1),$$

т. е.

$$u_1=A,$$
$$u_2=A+B.$$

Отсюда

$$A=u_1, \qquad B=u_2-u_1$$

и, следовательно,

$$u_n=u_1+(n-1)(u_2-u_1).$$

Это и есть общая формула для члена любой последовательности, удовлетворяющей уравнению

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n.$$

Полагая $u_1=a$, $u_2-u_1=d$, мы представим её в виде:

$$u_n=a+(n-1)d.$$

Это — известная формула для общего члена арифметической прогрессии.

Пример 2. Рассмотрим другое возвратное уравнение второго порядка:

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n.$$

Полагая $x_1=1$, $x_2=1$, получим уже знакомую последовательность Фибоначчи:

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ \ldots$$

В качестве второй последовательности, входящей в состав базиса, возьмём последовательность $\{y_n\}$, для которой $y_1=0$

и $y_2=1$. Будем иметь:

$$y_3=y_2+y_1=1, \quad y_4=y_3+y_2=2, \quad y_5=y_4+y_3=3, \quad \ldots$$

Здесь $y_2=x_1$, $y_3=x_2$, $y_4=x_3$, $y_5=x_4$, ... и, вообще, $y_n=x_{n-1}$ $(n=2, 3, \ldots)$. В самом деле, если мы уже установили эти равенства для всех значений $n \leqslant m+1$ так, что, в частности, $y_{m+1}=x_m$, $y_m=x_{m-1}$, то для y_{m+2} получим:

$$y_{m+2}=y_{m+1}+y_m=x_m+x_{m-1}=x_{m+1},$$

т. е. предполагаемые равенства справедливы и для $n=m+2$.

Итак,

$$y_n=x_{n-1} \quad (n=2, 3, \ldots).$$

Поэтому для любой последовательности, удовлетворяющей уравнению

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,$$

находим по предыдущему [формула (39)]:

$$u_n=Ax_n+By_n,$$

где A и B определяются из уравнений

$$u_1=Ax_1+By_1=A,$$
$$u_2=Ax_2+By_2=A+B,$$

откуда

$$A=u_1, \quad B=u_2-u_1$$

и

$$u_n=u_1x_n+(u_2-u_1)y_n.$$

При $n \geqslant 2$ y_n можно заменить через x_{n-1}, откуда

$$u_n=u_1x_n+(u_2-u_1)x_{n-1} \quad (n \geqslant 2),$$

или

$$u_n=u_1(x_n-x_{n-1})+u_2x_{n-1}.$$

При $n \geqslant 3$

$$x_n=x_{n-1}+x_{n-2}, \text{ т. е. } x_n-x_{n-1}=x_{n-2}$$

и, следовательно,

$$u_n=u_1x_{n-2}+u_2x_{n-1} \qquad (n \geqslant 3).$$

Итак, члены любой последовательности $\{u_n\}$, удовлетворяющей уравнению

$$u_{n+2}=u_{n+1}+u_n,$$

выражаются через числа Фибоначчи по найденной нами формуле. В частности, если $u_1 = -3$, $u_2 = 1$ (см. стр. 15), то

$$u_n = -3x_{n-2} + x_{n-1} \qquad (n \geqslant 3).$$

6. Покажем теперь, что при некоторых весьма общих условиях можно найти базис возвратного уравнения (33)

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n,$$

состоящий из k геометрических прогрессий с различными знаменателями. С этой целью выясним, при каких условиях некоторая геометрическая прогрессия

$$x_1 = 1,\ x_2 = q,\ \ldots,\ x_n = q^{n-1},\ \ldots \qquad (q \neq 0)$$

удовлетворяет уравнению (33). Замечая, что

$$x_{n+k} = q^{n+k-1},\ x_{n+k-1} = q^{n+k-2},\ \ldots,\ x_n = q^{n-1}$$

и подставляя эти величины в уравнение (33) (вместо u_{n+k}, u_{n+k-1}, ..., u_n), получим:

$$q^{n+k-1} = a_1 q^{n+k-2} + a_2 q^{n+k-3} + \ldots + a_n q^{n-1},$$

откуда

$$q^k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \ldots + a_k. \qquad (43)$$

Итак, *геометрическая прогрессия только тогда может удовлетворять возвратному уравнению* (33) *порядка* k, *когда знаменатель прогрессии* q *удовлетворяет алгебраическому уравнению* (43) *степени* k *с теми же коэффициентами, как и в уравнении* (33).

Уравнение (43) называется *характеристическим* для возвратного уравнения (33). Если $q = \alpha$ — какой-либо корень характеристического уравнения (действительный или мнимый), то, положив

$$x_n = \alpha^{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \qquad (44)$$

получим геометрическую прогрессию с первым членом $x_1 = 1$ и со знаменателем α, которая удовлетворяет уравнению (33). В самом деле, по условию, α есть корень уравнения (43), т. е.

$$\alpha^k = a_1 \alpha^{k-1} + a_2 \alpha^{k-2} + \ldots + a_k.$$

Умножая обе части на α^{n-1}, где n — произвольное натуральное число, получаем:

$$\alpha^{n+k-1} = a_1 \alpha^{n+k-2} + a_2 \alpha^{n+k-3} + \ldots + a_k \alpha^{n-1},$$

т. е. последовательность (44) удовлетворяет уравнению (33).

Итак, каждому корню $q=a$ характеристического уравнения (43) соответствует геометрическая прогрессия (44) со знаменателем a, удовлетворяющая возвратному уравнению (33).

Чтобы составить базис из одних лишь геометрических прогрессий с различными знаменателями, нужно иметь их в достаточном количестве, равном k, а для этого нужно иметь k различных корней характеристического уравнения.

Допустим, что все корни характеристического уравнения различны между собой:

$$q_1=\alpha,\ q_2=\beta,\ \ldots,\ q_k=\gamma.$$

Тогда получим k геометрических прогрессий, удовлетворяющих уравнению (33):

$$\left.\begin{array}{l} 1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \ldots,\ \alpha^{n-1},\ \ldots, \\ 1,\ \beta,\ \beta^2,\ \ldots,\ \beta^{n-1},\ \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1,\ \gamma,\ \gamma^2,\ \ldots,\ \gamma^{n-1},\ \ldots \end{array}\right\} \tag{45}$$

Покажем, что система последовательностей (45) составляет базис уравнения (33), т. е. что для всякой последовательности $\{u_n\}$, удовлетворяющей уравнению (33), можно подобрать такие числа $A,\ B,\ \ldots,\ C$, что будем иметь при любом n:

$$u_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}+\ldots+C\gamma^{n-1}. \tag{46}$$

Для доказательства достаточно проверить, что система уравнений, получаемых из (45), при $n=1,\ 2,\ \ldots,\ k$:

$$\left.\begin{array}{r} A+B+\ldots+C=u_1, \\ A\alpha+B\beta+\ldots+C\gamma=u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\alpha^{k-1}+B\beta^{k-1}+\ldots+C\gamma^{k-1}=u_k, \end{array}\right\} \tag{47}$$

имеет решение относительно неизвестных $A,\ B,\ \ldots,\ C$ при любых значениях правых частей этих уравнений, а для этого в свою очередь достаточно (см. стр. 17), чтобы соответствующая однородная система

$$\left.\begin{array}{r} A+B\ \ +\ldots+C=0, \\ A\alpha+B\beta+\ldots+C\gamma=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A\alpha^{k-1}+B\beta^{k-1}+\ldots+C\gamma^{k-1}=0 \end{array}\right\} \tag{48}$$

допускала одно только нулевое решение. Но это действительно так.

В самом деле, допустим, что существует нулевое решение (48), т. е. что существуют числа A, $B, \ldots C$, из которых по крайней мере одно, например A, отлично от нуля, удовлетворяющие системе (48). Чтобы вывести отсюда противоречие, построим сначала многочлен $M(x)$ степени $k-1$, обращающийся в нуль при $x=\beta$, $\ldots$, $x=\gamma$ и в единицу при $x=\alpha$. Так как многочлен этот степени $k-1$ и обращается в нуль при $k-1$ различных значениях x: $\beta, \ldots \gamma$, то он должен иметь вид:

$$M(x)=\mu(x-\beta)\ldots(x-\gamma),$$

где μ—какое-либо число. Полагая $x=\alpha$, мы должны получить $M(\alpha)=1$, откуда

$$1=\mu(\alpha-\beta)\ldots(\alpha-\gamma)$$

и

$$\mu=\frac{1}{(\alpha-\beta)\ldots(\alpha-\gamma)}.$$

Итак,

$$M(x)=\frac{(x-\beta)\ldots(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)\ldots(\alpha-\gamma)};$$

очевидно, что он действительно удовлетворяет поставленным условиям. Раскрывая скобки и приводя подобные члены, представим его в виде

$$M(x)=m_0+m_1x+\ldots+m_{k-1}x^{k-1}.$$

Если теперь умножить уравнения (48) на m_0, $m_1, \ldots, m_{k-1}$ и сложить почленно, то получим:

$$\begin{gathered}A(m_0+m_1\alpha+\ldots+m_{k-1}\alpha^{k-1})+\\+B(m_0+m_1\beta+\ldots+m_{k-1}\beta^{k-1})+\ldots+\\+C(m_0+m_1\gamma+\ldots+m_{k-1}\gamma^{k-1})=0,\end{gathered}$$

или

$$AM(\alpha)+BM(\beta)+\ldots+CM(\gamma)=0.$$

Но $M(\alpha)=1$, $M(\beta)=0$, $\ldots$, $M(\gamma)=0$ и, следовательно,

$$A=0,$$

что противоречит предположению.

Итак, система (48) имеет одно только нулевое решение, и следовательно, система (47) имеет решение (единственное) при любых $u_1, u_2, \ldots, u_k$, а это в свою очередь означает, что система (45) образует базис уравнения (33).

Мы нашли, таким образом, что для всякого возвратного уравнения

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + \ldots + a_k u_n,$$

для которого соответствующее характеристическое уравнение

$$q^k = a_1 q^{k-1} + a_2 q^{k-2} + \ldots + a_k$$

имеет различные корни: $q = \alpha$, $q = \beta$, ..., $q = \gamma$, существует базис, образованный k геометрическими прогрессиями со знаменателями: $\alpha, \beta, \ldots, \gamma$. Иными словами, для членов любой последовательности $\{u_n\}$, удовлетворяющей уравнению (33), существует k чисел: $A, B, \ldots, C$ [они находятся из уравнений (47)] таких, что

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1} + \ldots + C\gamma^{n-1} \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Подведём итоги сказанному в п. 6.

Возвратному уравнению порядка k соответствует алгебраическое уравнение степени k с теми же коэффициентами — его характеристическое уравнение. Каждый из корней характеристического уравнения представляет знаменатель геометрической прогрессии, удовлетворяющей данному возвратному уравнению. В случае, когда все корни характеристического уравнения различны между собой, получаются k различных геометрических прогрессий, образующих базис возвратного уравнения. Следовательно, в этом случае члены любой последовательности, удовлетворяющей возвратному уравнению, можно получить путём почленного сложения некоторых геометрических прогрессий (числом k).

7. Займёмся приложениями найденных результатов. Начнём с последовательности Фибоначчи. Здесь возвратное уравнение таково:

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$$

и, следовательно, характеристическое уравнение (43) имеет вид:

$$q^2 = q + 1.$$

Решая его, получим два различных действительных корня:

$$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}.$$

Поэтому общий член последовательности Фибоначчи можно записать так:

$$u_n = A\alpha^{n-1} + B\beta^{n-1}.$$

Чтобы найти неизвестные коэффициенты A и B, положим $n=1$ и $n=2$; получим:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 1 = A + B, \\ u_2 &= 1 = A\alpha + B\beta = \frac{1}{2}(A+B) + \frac{\sqrt{5}}{2}(A-B). \end{aligned}\right\}$$

Решая последнюю систему, найдём:

$$A = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, \qquad B = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}},$$

и, следовательно,

$$u_n = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

или

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]. \qquad (49)$$

Это и есть общее выражение для чисел Фибоначчи. На первый взгляд выведенная формула представляется громоздкой и мало удобной для вычислений. Однако с её помощью можно получить ряд любопытных результатов. Покажем, например, что сумма квадратов двух соседних чисел Фибоначчи есть также некоторое число Фибоначчи.

В самом деле:

$$u_n^2 = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - 2(-1)^n\right],$$

$$u_{n+1}^2 = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2} - 2(-1)^{n+1}\right];$$

следовательно,

$$u_{n+1}^2 + u_n^2 =$$

$$= \frac{1}{5}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{5+\sqrt{5}}{2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} \cdot \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}\right\} = u_{2n+1}.$$

Итак,

$$u_{n+1}^2 + u_n^2 = u_{2n+1}. \tag{50}$$

Например,

$$u_{13} = u_7^2 + u_6^2 = 13^2 + 8^2 = 233.$$

Это, между прочим, и есть ответ на задачу Фибоначчи.

Предлагаем читателю доказать для чисел Фибоначчи соотношение более общее, чем (50), а именно:

$$u_n u_m + u_{n+1} u_{m+1} = u_{n+m+1}. \tag{51}$$

В качестве другого приложения формулы (49) докажем следующую теорему:

Пусть a и b — два натуральных числа, причём $a < b$; тогда число операций последовательного деления в алгорифме Евклида, необходимых для отыскания наибольшего общего делителя (сокращённо: н. о. д.) *a и b, не превосходит упятерённого числа цифр числа a, записанного по десятичной системе счисления.*

Применяя к отысканию н. о. д. чнсел b и a алгорифм Евклида, получаем цепь равенств:

$$\left.\begin{array}{rl}
1) & b = ax' + y', \\
2) & a = y'x'' + y'', \\
3) & y' = y''x''' + y''', \\
\cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
k) & y^{(k-2)} = y^{(k-1)}x^{(k)} + y^{(k)}, \\
k+1) & y^{(k-1)} = y^{(k)}x^{(k+1)}.
\end{array}\right\} \tag{52}$$

Здесь последовательные остатки удовлетворяют неравенствам

$$a > y' > y'' > y''' > \ldots > y^{(k-1)} > y^{(k)} \geqslant 1.$$

В последнем из равенств (52) остаток равен нулю. Следовательно, предыдущий остаток $y^{(k)}$ и есть н. о. д. чисел b и a. Поэтому k обозначает число операций, потребных для отыскания н. о. д. Наша задача, как мы уже сказали, заключается в оценке числа k. С этой целью будем сравнивать числа $y^{(k)}$, $y^{(k-1)}$, ..., y', a с числами Фибоначчи u_1, u_2, u_3, ... Заметим, что $y^{(k)} \geqslant 1 = u_2$, но предыдущий остаток $y^{(k-1)}$ больше $y^{(k)}$ и, следовательно, $y^{(k-1)} \geqslant 2 = u_3$. Поэтому из равенства k заключаем, что

$$y^{(k-2)} = y^{(k-1)}x^{(k)} + y^{(k)} \geqslant y^{(k-1)} \cdot 1 + y^{(k)} \geqslant u_3 + u_2 = u_4.$$

Итак, $y^{(k)} \geqslant u_2$, $y^{(k-1)} \geqslant u_3$, $y^{(k-2)} \geqslant u_4$.

Допустим, что мы уже доказали справедливость неравенств

$y^{(k)} \geqslant u_2, \ldots, y^{(m)} \geqslant u_{k-m+2}, \quad y^{(m-1)} \geqslant u_{k-m+3} \quad (m-1 \geqslant 2)$.

Тогда из равенства $y^{(m-2)} = y^{(m-1)}x^{(m)} + y^{(m)}$ заключаем

$$y^{(m-2)} \geqslant y^{(m-1)} \cdot 1 + y^{(m)} \geqslant u_{k-m+3} + u_{k-m+2} = u_{k-m+4}.$$

Итак, продолжая наши рассуждения, мы дойдём до неравенств

$$y'' \geqslant u_k, \quad y' \geqslant u_{k+1}$$

и далее, из соотношения 2) выведем, что

$$a = y'x'' + y'' \geqslant y' \cdot 1 + y'' \geqslant u_{k+1} + u_k = u_{k+2}.$$

Но u_{k+2} по формуле (49) имеет следующий вид:

$$u_{k+2} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right].$$

Поэтому

$$a \geqslant \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2}\right] >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} - 1\right] \qquad (53)$$

$\left(\text{так как } \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right| < 1 \text{ и, следовательно, } \left|\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right|^{k+2} < 1\right)$.

Из (53) получаем, что

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+2} < a\sqrt{5} + 1 < \sqrt{5}(a+1) < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 (a+1)$$

$$\left(\sqrt{5} < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \text{ так как } \sqrt{5} < 3\right).$$

Поэтому

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k < a + 1. \qquad (54)$$

Заметим теперь, что

$$u_5 = 5 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^5\right] <$$

$$< \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 + 1\right],$$

откуда

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^5 > 5\sqrt{5}-1 > 10.$$

Следовательно,

$$10^k < \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{5k} < (a+1)^5. \qquad (55)$$

Если число a по десятичной системе счисления записывается с помощью n цифр (a — n-значное число), то очевидно, что

$$10^{n-1} \leqslant a < 10^n,$$

откуда

$$a+1 \leqslant 10^n$$

и, следовательно, в силу неравенства (55),

$$10^k < (a+1)^5 \leqslant 10^{5n},$$

или

$$k < 5n. \qquad (56)$$

Это и есть нужный результат: количество k последовательных делений в алгорифме Евклида меньше, чем упятерённое число цифр наименьшего из чисел b и a, записанного по десятичной системе счисления. Из приведённого здесь доказательства можно усмотреть, что наиболее невыгодный случай применения алгорифма Евклида (в смысле значительного количества операций, близкого к установленному в теореме пределу) будет тогда, когда b и a являются соседними числами Фибоначчи. Для подтверждения этого возьмём, например: $b = u_{20} = 6765$ и $a = u_{19} = 4181$. Здесь a — четырёхзначное число и, следовательно, по доказанной теореме, количество операций в алгорифме Евклида должно быть меньше $5 \cdot 4 = 20$. В действительности мы получаем здесь $k = 17$ операций. В самом деле:

1) $6765 = 4181 \cdot 1 + 2584,$	10) $89 = 55 \cdot 1 + 34,$
2) $4181 = 2584 \cdot 1 + 1597,$	11) $55 = 34 \cdot 1 + 21,$
3) $2584 = 1597 \cdot 1 + 987,$	12) $34 = 21 \cdot 1 + 13,$
4) $1597 = 987 \cdot 1 + 610,$	13) $21 = 13 \cdot 1 + 8,$
5) $987 = 610 \cdot 1 + 377,$	14) $13 = 8 \cdot 1 + 5,$
6) $610 = 377 \cdot 1 + 233,$	15) $8 = 5 \cdot 1 + 3,$
7) $377 = 233 \cdot 1 + 144,$	16) $5 = 3 \cdot 1 + 2,$
8) $233 = 144 \cdot 1 + 89,$	17) $3 = 2 \cdot 1 + 1,$
9) $144 = 89 \cdot 1 + 55,$	18) $2 = 1 \cdot 2 + 0.$

В качестве остатков здесь получаются одно за другим в убывающем порядке числа Фибоначчи. Все частные (кроме последнего) равны единице, чем и объясняется наличие большого числа операций. Наибольший общий делитель оказался равным единице [равенство (17)], что для соседних чисел Фибоначчи можно было предвидеть с самого начала. Действительно, из того, что $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$, вытекает, что н.о.д. чисел u_{n+2} и u_{n+1} совпадает с н.о.д. $u_{n+1}+u_n$. Поэтому для каждой пары соседних чисел Фибоначчи н.о.д. один и тот же. Чтобы найти его, достаточно рассмотреть пару $u_2=u_1=1$, откуда и следует, что он равен единице.

8. В качестве следующего примера рассмотрим периодическую последовательность (16):

$$u_1=5,\ u_2=7,\ u_3=1,\ u_4=3,\ u_5=2,\ u_6=1,\ u_7=3,\ \ldots$$

Здесь возвратное уравнение имеет вид:

$$u_{n+3}=u_n \qquad (n\geqslant 3)$$

и, следовательно, характеристическое уравнение таково:

$$q^3=1.$$

Это уравнение имеет следующие корни:

$$\alpha=1,\quad \beta=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ и } \gamma=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Поэтому общий член последовательности следует искать в виде [см. формулу (46)]

$$u_n=A\alpha^{n-1}+B\beta^{n-1}+C\gamma^{n-1}=$$
$$=A+B\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}+C\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1}.$$

Мы можем требовать, чтобы формула эта выполнялась для всех значений n, для которых выполняется и возвратное уравнение: $n=3, 4, 5, \ldots$

Заметим, что

$$-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$
$$-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

поэтому по формуле Муавра:

$$u_n = A + B\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} + C\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{n-1} =$$

$$= A + (-1)^{n-1}B\left[\cos\frac{\pi}{3}(n-1) - i\sin\frac{\pi}{3}(n-1)\right] +$$

$$+ (-1)^{n-1}C\left[\cos\frac{\pi}{3}(n-1) + i\sin\frac{\pi}{3}(n-1)\right] =$$

$$= A + (B+C)(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{3}(n-1) +$$

$$+ i(-B+C)(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{3}(n-1).$$

Положим $B + C = A_1$ и $i(-B+C) = A_2$; тогда формула эта перепишется так:

$$u_n = A + A_1(-1)^{n-1}\cos\frac{\pi}{3}(n-1) + A_2(-1)^{n-1}\sin\frac{\pi}{3}(n-1)$$

$$(n \geqslant 3),$$

и останется лишь определить неизвестные коэффициенты A, A_1 и A_2. Полагая $n=3$, $n=4$ и $n=5$, получим три уравнения с тремя неизвестными:

$$u_3 = 1 = A + A_1\cos\frac{2\pi}{3} + A_2\sin\frac{2\pi}{3} = A - \frac{1}{2}A_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}A_2,$$

$$u_4 = 3 = A - A_1\cos\frac{3\pi}{3} - A_2\sin\frac{3\pi}{3} = A + A_1,$$

$$u_5 = 2 = A + A_1\cos\frac{4\pi}{3} + A_2\sin\frac{4\pi}{3} = A - \frac{1}{2}A_1 - \frac{\sqrt{3}}{2}A_2.$$

Отсюда находим:

$$A = 2,\ A_1 = 1 \text{ и } A_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Итак,

$$u_n = 2 + (-1)^{n-1}\left[\cos(n-1)\frac{\pi}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin(n-1)\frac{\pi}{3}\right] =$$

$$= 2 + (-1)^n\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\sin(n-2)\frac{\pi}{3} \qquad (n \geqslant 3).$$

Мы видим, что общий член последовательности выражается в этом примере через тригонометрические функции, что вполне согласуется с периодичностью последовательности.

Приведём, наконец, пример, непосредственно относящийся к делению многочленов.

Пусть нам даны два многочлена: $P(x)=3+x^2-x^5$ и $Q(x)=2-x-2x^2+x^3$; задача заключается в определении структуры коэффициентов частного, получающихся от деления $P(x)$ на $Q(x)$. Последовательность коэффициентов частного

$$u_1=D_0,\ u_2=D_1,\ \ldots,\ u_n=D_{n-1},\ \ldots,$$

как мы видели в п. 2, является возвратной последовательностью, члены которой удовлетворяют уравнению (20):

$$D_{n+k}=-\frac{B_1}{B_0}D_{n+k-1}-\ldots-\frac{B_k}{B_0}D_n \quad (n\geqslant l-k+1).$$

Здесь k — степень $Q(x)$, $B_0, B_1, \ldots, B_k$ — коэффициенты $Q(x)$ и l — степень $P(x)$.

Следовательно, $k=3$, $B_0=2$, $B_1=-1$, $B_2=-2$, $B_3=1$, $l=5$:

$$D_{n+3}=\frac{1}{2}D_{n+2}+\frac{2}{2}D_{n+1}-\frac{1}{2}D_n \quad (n\geqslant 5-3+1=3),$$

т. е.

$$D_{n+3}=\frac{1}{2}D_{n+2}+D_{n+1}-\frac{1}{2}D_n \quad (n\geqslant 3).$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$q^3=\frac{1}{2}q^2+q-\frac{1}{2},$$

или

$$q^3-q-\frac{1}{2}(q^2-1)=\left(q-\frac{1}{2}\right)(q-1)(q+1)=0.$$

Поэтому его корни суть

$$\alpha=\frac{1}{2},\quad \beta=1,\quad \gamma=-1,$$

и для D_n получаем формулу

$$D_n=A\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+B\cdot 1^n+C(-1)^n \quad (n\geqslant 3).$$

Положим $n=3$, $n=4$ и $n=5$; получим уравнения:

$$D_3=\frac{1}{8}A+B-C,$$

$$D_4=\frac{1}{16}A+B+C,$$

$$D_5=\frac{1}{32}A+B-C.$$

Здесь неизвестны не только коэффициенты A, B и C, но и числа D_3, D_4, D_5. Чтобы определить их, произведём фактически деление $P(x)$ на $Q(x)$ так, чтобы в частном получить члены до пятой степени включительно. Получим:

$$
\begin{array}{l|l}
\;\;3 + x^2 - x^5 & 2 - x - 2x^2 + x^3 \\
\hline
-\;\underline{3 - \frac{3}{2}x - 3x^2 + \frac{3}{2}x^3} & \frac{3}{2} + \frac{3}{4}x + 2\frac{3}{8}x^2 + 1\frac{3}{16}x^3 + 2\frac{19}{32}x^4 \\
\qquad \frac{3}{2}x + 4x^2 - \frac{3}{2}x^3 - x^5 & \\
\qquad -\;\underline{\frac{3}{2}x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^4} & \\
\qquad\qquad 4\frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{4}x^4 - x^5 & \\
\qquad\qquad -\;\underline{4\frac{3}{4}x^2 - 2\frac{3}{8}x^3 - 4\frac{3}{4}x^4 + 2\frac{3}{8}x^5} & \\
\qquad\qquad\qquad 2\frac{3}{8}x^3 + 4x^4 - 3\frac{3}{8}x^5 & \\
\qquad\qquad\qquad -\;\underline{2\frac{3}{8}x^3 - 1\frac{3}{16}x^4 - 2\frac{3}{8}x^5 + 1\frac{3}{16}x^6} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 5\frac{3}{16}x^4 - x^5 - 1\frac{3}{16}x^6 & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad -\;\underline{5\frac{3}{16}x^4 - 2\frac{19}{32}x^5 - 5\frac{3}{16}x^6 + 2\frac{19}{32}x^7} & \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad 1\frac{19}{32}x^5 + 4x^6 - 2\frac{19}{32}x^7. &
\end{array}
$$

Отсюда $D_0 = \frac{3}{2}$, $D_1 = \frac{3}{4}$, $D_2 = 2\frac{3}{8}$, $D_3 = 1\frac{3}{16}$, $D_4 = 2\frac{19}{32}$, $D_5 = \frac{51}{64}$.

Следовательно, полученная выше система уравнений имеет вид:

$$\frac{1}{8}A + B - C = 1\frac{3}{16},$$

$$\frac{1}{16}A + B + C = 2\frac{19}{32},$$

$$\frac{1}{32}A + B - C = \frac{51}{64},$$

откуда находим:

$$A = 4\frac{1}{6}, \quad B = \frac{3}{2}, \quad C = \frac{5}{6}.$$

Итак,

$$D_n = 4\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2^n} + \frac{3}{2} + \frac{5}{6}(-1)^n \quad (n \geqslant 3).$$

Наша задача решена. Из найденной формулы получаем:

$$D_6 = 2\frac{51}{128}, \quad D_7 = \frac{179}{256}, \qquad D_8 = 2\frac{179}{512}, \ \ldots$$

9. Во всех разобранных выше примерах характеристическое уравнение имело только простые корни. Рассмотрим, однако, пример последовательности сумм квадратов натуральных чисел, приведённый на стр. 13. Для этой последовательности возвратное уравнение имеет вид:

$$s_{n+4} = 4s_{n+3} - 6s_{n+2} + 4s_{n+1} - s_n,$$

и, следовательно, характеристическое уравнение таково:

$$q^4 = 4q^3 - 6q^2 + 4q - 1,$$

или

$$q^4 - 4q^3 + 6q^2 - 4q + 1 = (q-1)^4 = 0.$$

Оно обладает только одним четырёхкратным корнем: $q = 1$; поэтому мы и получаем здесь только одну геометрическую прогрессию со знаменателем 1, члены которой удовлетворяют данному возвратному уравнению.

В подобных случаях приходится искать другие простейшие возвратные последовательности, которые вместе с указанной геометрической прогрессией могут составить базис данного уравнения. В нашем примере такими последовательностями будут:

$$\begin{gathered} 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n-1,\ \ldots; \\ 0,\ 1,\ 4,\ 9,\ \ldots,\ (n-1)^2,\ \ldots; \\ 0,\ 1,\ 8,\ 27,\ \ldots,\ (n-1)^3,\ \ldots \end{gathered}$$

(как это легко сможет проверить читатель). Не разбирая самого общего случая, требующего довольно громоздких выкладок, мы остановимся на следующем типичном примере.

Пусть имеем возвратное уравнение

$$u_{n+k} = C_k^{k-1} a u_{n+k-1} - \\ - C_k^{k-2} a^2 u_{n+k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^0 a^k u_n, \quad (57)$$

где C_k^{k-1}, C_k^{k-2}, ..., C_k^0 — биномиальные коэффициенты порядка k. Соответствующее характеристическое уравнение

$$q^k = C_k^{k-1} a q^{k-1} - C_k^{k-2} a^2 q^{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} C_k^0 a^k$$

может быть представлено в виде

$$(q-a)^k = 0.$$

Оно имеет k-кратный корень $q=a$; очевидно, что

$$(a-a)^k = a^k - C_k^{k-1} a^k + \\ + C_k^{k-2} a^k - \ldots + (-1)^k C_k^0 a^k = 0. \quad (58)$$

Рассмотрим вообще следующие тождества:

$$(a-a)^{k-m} = a^{k-m} - C_{k-m}^{k-m-1} a^{k-m} + \\ + C_{k-m}^{k-m-2} a^{k-m} - \ldots + (-1)^{k-m} C_{k-m}^0 a^{k-m} = 0,$$

где $m = 0, 1, 2, \ldots, k-1$, или:

$$(1-1)^{k-m} = C_{k-m}^{k-m} - C_{k-m}^{k-m-1} + C_{k-m}^{k-m-2} - \ldots + \\ + (-1)^{\mu} C_{k-m}^{k-m-\mu} + \ldots + (-1)^{k-m} C_{k-m}^0 = 0. \quad (59)$$

Равенство (59), соответствующее значению $m=0$, имеет вид

$$C_k^k - C_k^{k-1} + C_k^{k-2} - \ldots + (-1)^{\mu} C_k^{k-\mu} + \\ + \ldots + (-1)^k C_k^0 = 0. \quad (59')$$

Замечая, что

$$C_k^{k-\mu} = \frac{k(k-1)\ldots(\mu+1)}{1\cdot 2\ldots(k-\mu)} = \frac{k(k-1)\ldots(k-m+1)}{(k-m-\mu+1)\ldots(k-\mu)} C_{k-m}^{k-m-\mu}$$

$$(m = 1, 2, \ldots, k-1;\ 0 \leqslant \mu \leqslant k-m),$$

или

$$k(k-1)\ldots(k-m+1) C_{k-m}^{k-m-\mu} = \\ = (k-m-\mu+1)\ldots(k-\mu) C_k^{k-\mu}, \quad (60)$$

помножим каждое из равенств (59′) ($m = 1, 2, \ldots, k-1$) на соответствующий множитель $k(k-1)\ldots(k-m+1)$ и после этого, пользуясь (60), перепишем их в виде:

$$(k-m+1)\ldots k C_k^k - (k-m)\ldots(k-1) C_k^{k-1} + \ldots + \\ + (-1)^{\mu} (k-m-\mu+1)\ldots(k-\mu) C_k^{k-\mu} + \\ + \ldots + (-1)^{k-m} 1\cdot 2\ldots m C_k^0 = 0 \quad (59'')$$

$$(m = 1, 2, \ldots, k-1).$$

Докажем теперь, что при $m=0, 1, 2, \ldots, k-1$ справедливы следующие равенства:

$$k^m C_k^k-(k-1)^m C_k^{k-1}+\ldots+(-1)^\mu(k-\mu)^m C_k^{k-\mu}+ \\ +\ldots+(-1)^k\cdot 0^m C_k^0=0. \quad (61)$$

В самом деле, равенство, соответствующее $m=0$, совпадает с (59′) и, следовательно, справедливо.

Рассуждая по индукции, допустим, что равенства (61) уже доказаны для $m=0, 1, \ldots, j$ $(j \leqslant k-2)$, и докажем тогда, что равенство, соответствующее $m=j+1$, также справедливо. С этой целью введём многочлен степени $j+1$:

$$f(x)=(x-j)(x-j+1)\ldots(x-1)x= \\ =x^{j+1}-\beta_j x^j-\ldots-\beta_1 x. \quad (62)$$

Умножая равенства (61) при $m=1, 2, \ldots, j$ соответственно на числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_j$, получим:

$$\left.\begin{array}{l} \beta_1 k C_k^k-\beta_1(k-1) C_k^{k-1}+ \\ \quad +\ldots+\beta_1(-1)^\mu(k-\mu) C_k^{k-\mu}+ \\ \qquad +\ldots+\beta_1(-1)^k\cdot 0\cdot C_k^0 \qquad =0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \beta_j k^j C_k^k-\beta_j(k-1)^j C_k^{k-1}+ \\ \quad +\ldots+\beta_j(-1)^\mu(k-\mu)^j C_k^{k-\mu}+ \\ \qquad +\ldots+\beta_j(-1)^k\cdot 0\cdot C_k^0 \qquad =0. \end{array}\right\} \quad (63)$$

Запишем ещё равенство (59″), соответствующее значению $m=j+1$, в виде:

$$f(k) C_k^k-f(k-1) C_k^{k-1}+\ldots+(-1)^\mu f(k-\mu) C_k^{k-\mu}+ \\ +\ldots+(-1)^k f(0) C_k^0=0 \quad (64)$$

[мы воспользовались здесь тем, что $(k-j)\ldots k=f(k)$, $(k-j-1)\ldots(k-1)=f(k-1), \ldots, (k-j-\mu)\ldots(k-\mu)= =f(k-\mu), \ldots$].

Складывая (63) и (64) почленно, будем иметь:

$$[\beta_1 k+\ldots+\beta_j k^j+f(k)] C_k^k- \\ -[\beta_1(k-1)+\ldots+\beta_j(k-1)^j+f(k-1)] C_k^{k-1}+\ldots+ \\ +(-1)^\mu[\beta_1(k-\mu)+\ldots+\beta_j(k-\mu)^j+f(k-\mu)] C_k^{k-\mu}+ \\ +\ldots+(-1)^k[\beta_1\cdot 0+\ldots+\beta_j\cdot 0^j+f(0)] C_k^0=0.$$

Но в силу (62):

$$\beta_1 x+\beta_2 x^2+\ldots+\beta_j x^j+f(x)=x^{j+1}.$$

Поэтому полученный результат принимает вид:

$$k^{j+1}C_k^k-(k-1)^{j+1}C_k^{k-1}+\ldots+(-1)^{\mu}(k-\mu)^{j+1}C_k^{k-\mu}+$$
$$+\ldots+(-1)^k\cdot 0^{j+1}\cdot C_k^0=0.$$

Это и есть равенство (61) для $m=j+1$. Таким образом, доказательство справедливости соотношений (61) закончено.

Рассмотрим, наконец, произвольный многочлен степени не выше $k-1$:

$$P(x)=A_{k-1}x^{k-1}+A_{k-2}x^{k-2}+\ldots+A_0. \qquad (65)$$

Умножая равенства (61), при $m=0, 1, 2, \ldots, k-1$, соответственно на $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$, получим:

$$A_0C_k^k-A_0C_k^{k-1}+\ldots+$$
$$+(-1)^{\mu}A_0C_k^{k-\mu}+\ldots+(-1)^kA_0C_k^0=0,$$
$$A_1kC_k^k-A_1(k-1)C_k^{k-1}+\ldots+$$
$$+(-1)^{\mu}A_1(k-\mu)C_k^{k-\mu}+\ldots+(-1)^kA_1\cdot 0\cdot C_k^0=0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{k-1}k^{k-1}C_k^k-A_{k-1}(k-1)^{k-1}C_k^{k-1}+\ldots+$$
$$+(-1)^{\mu}A_{k-1}(k-\mu)^{k-1}C_k^{k-\mu}+\ldots+$$
$$+(-1)^kA_{k-1}\cdot 0^{k-1}\cdot C_k^0=0.$$

Складывая их почленно, будем иметь:

$$(A_0+A_1k+\ldots+A_{k-1}k^{k-1})C_k^k-$$
$$-[A_0+A_1(k-1)+\ldots+A_{k-1}(k-1)^{k-1}]C_k^{k-1}+\ldots+$$
$$+(-1)^{\mu}[A_0+A_1(k-\mu)+\ldots+A_{k-1}(k-\mu)^{k-1}]C_k^{k-\mu}+$$
$$+\ldots+(-1)^k[A_0+A_1\cdot 0+\ldots+A_{k-1}\cdot 0^{k-1}]C_k^0=0,$$

или

$$P(k)\cdot C_k^k-P(k-1)\cdot C_k^{k-1}+\ldots+(-1)^kP(0)\cdot C_k^0=0. \qquad (66)$$

Следовательно, произвольный многочлен $P(x)$ степени не выше $k-1$ удовлетворяет соотношению (66).

Положим, в частности, $P(x)=(x+n-1)^m$, где n — произвольное натуральное число и m — целое, $0\leqslant m\leqslant k-1$.

Тогда равенство (66) примет вид.

$$(k+n-1)^m C_k^k-(k+n-2)^m C_k^{k-1}+\ldots+$$
$$+(-1)^k (n-1)^m C_k^0=0,$$

или, помножая на a^{k+n-1} и заменяя C_k^k через 1:

$$(k+n-1)^m a^{k+n-1}=C_k^{k-1}a(k+n-2)^m a^{k+n-2}-$$
$$-C_k^{k-2}a^2(k+n-3)^m a^{k+n-3}+\ldots+$$
$$+(-1)^{k-1} C_k^0 a^k (n-1)^m a^{n-1}. \quad (67)$$

Сравнивая (67) с (57), заключаем, что возвратному уравнению (57) удовлетворяет каждая из k последовательностей

$$\left.\begin{array}{ll}
1,\ a,\ a^2,\ \ldots,\ a^{n-1},\ \ldots, & (m=0); \\
0,\ a,\ 2a^2,\ \ldots,\ (n-1)\,a^{n-1},\ \ldots, & (m=1); \\
0,\ a,\ 2^2a^2,\ \ldots,\ (n-1)^2\,a^{n-1},\ \ldots, & (m=2); \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
0,\ a,\ 2^{k-1}a^2,\ \ldots,\ (n-1)^{k-1}a^{n-1},\ \ldots, & (m=k-1).
\end{array}\right\} \quad (68)$$

Если мы установим, что они образуют базис, то отсюда будет следовать, что общий член произвольной последовательности, удовлетворяющий уравнению (57), имеет вид:

$$u_n=[B_0+B_1(n-1)+\ldots+B_{k-1}(n-1)^{k-1}]\,a^{n-1}=$$
$$=Q(n-1)\,a^{n-1}, \quad (69)$$

где $Q(x)=B_0+B_1x+\ldots+B_{k-1}x^{k-1}$ многочлен степени не выше $k-1$, с произвольными коэффициентами.

Достаточно доказать, что система k линейных уравнений

$$\begin{array}{l}
B_0+B_1\cdot 0+\ldots+B_{k-1}\cdot 0^{k-1}=u_1, \\
B_0+B_1\cdot 1+\ldots+B_{k-1}\cdot 1^{k-1}=u_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_0+B_1(k-1)+\ldots+B_{k-1}(k-1)^{k-1}=u_k
\end{array}$$

имеет решение относительно неизвестных $B_0, B_1, \ldots, B_{k-1}$ при любых $u_1, \ldots, u_k$, т. е. (в силу предложения на стр. 17), что система

$$\begin{array}{r}
B_0=0, \\
B_0+B_1+\ldots+B_{k-1}=0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
B_0+(k-1)B_1+\ldots+(k-1)^{k-1}B_{k-1}=0
\end{array}$$

имеет только нулевое решение. Но уравнения последней системы обозначают, что

$$Q(0)=Q(1)=\ldots=Q(k-1)=0,$$

т. е. что уравнение

$$B_0+B_1x+\ldots+B_{k-1}x^{k-1}=0$$

степени не выше $k-1$ имеет, по крайней мере, k различных корней: $0, 1, 2, \ldots, k-1$. Отсюда следует, что

$$B_0=B_1=\ldots=B_{k-1}=0,$$

чем и заканчивается доказательство того, что последовательности (68) образуют базис возвратных последовательностей, удовлетворяющих уравнению (57).

В случае произвольной возвратной последовательности, удовлетворяющей общему уравнению

$$u_{n+k}=a_1u_{n+k-1}+a_2u_{n+k-2}+\ldots+a_ku_n \quad (a_k\neq 0), \tag{70}$$

характеристическое уравнение

$$q^k=a_1q^{k-1}+\ldots+a_k \tag{71}$$

может иметь некоторый корень α кратности a, корень β кратности b, ..., корень γ кратности c, а всего $a+b+\ldots+c=k$ корней.

Для этого наиболее общего случая можно доказать, что базис состоит из следующих k последовательностей:

$$\begin{array}{l}
1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}, \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0, \alpha, 2^{a-1}\alpha^2, \ldots, (n-1)^{a-1}\alpha^{n-1}, \ldots; \\
1, \beta, \beta^2, \ldots, \beta^{n-1}, \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0, \beta, 2^{b-1}\beta^2, \ldots, (n-1)^{b-1}\beta^{n-1}, \ldots; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
1, \gamma, \gamma^2, \ldots, \gamma^{n-1}, \ldots, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0, \gamma, 2^{c-1}\gamma^2, \ldots, (n-1)^{c-1}\gamma^{n-1}, \ldots
\end{array}$$

Поэтому

$$u_n=Q(n-1)\,\alpha^{n-1}+ \\ +R(n-1)\,\beta^{n-1}+\ldots+S(n-1)\,\gamma^{n-1}, \tag{72}$$

где $Q(x)$, $R(x)$, ..., $S(x)$ — какие-либо фиксированные многочлены, степеней не выше $a-1$, $b-1$, ..., $c-1$ соответственно.

Итак, *общий член u_n любой возвратной последовательности имеет вид суммы произведений многочленов относительно $n-1$* (или, что сводится к тому же, относительно n) *на общие члены геометрических прогрессий, знаменатели которых равны корням характеристического уравнения* (71).

В случае, когда все корни последнего уравнения — простые, указанные многочлены являются постоянными и общий член возвратной последовательности представляется в виде суммы членов геометрических прогрессий.

Можно доказать также справедливость обратного предложения. А именно, *любая последовательность $\{u_n\}$, общий член которой выражается по формуле* (72), *является возвратной**). Соответствующее характеристическое уравнение (71) строится по его корням α, β, ..., γ и по их кратностям a, b, ..., c (представляющим степени многочленов Q, R, ..., S, увеличенные на единицу). Отсюда немедленно находится и возвратное уравнение (70).

Рассмотрим в виде примера последовательность

$$u_n = (n-1)^2 \cdot 2^{n-1} + 3^{n-1}.$$

Сравнивая с (72), заключаем, что корни характеристического уравнения таковы: $\alpha = 2$, $\beta = 3$, причём кратность α равна $2+1=3$. Поэтому характеристическое уравнение должно иметь вид:

$$(q-2)^3(q-3) = q^4 - 9q^3 + 30q^2 - 44q + 24 = 0,$$

а возвратное уравнение запишется так:

$$u_{n+4} = 9u_{n+3} - 30u_{n+2} + 44u_{n+1} - 24u_n.$$

Предоставляем читателю проверить, что данная последовательность удовлетворяет последнему уравнению.

10. Иллюстрируем результаты п. 9 несколькими примерами. Мы видели в п. 2, что члены арифметической прогрес-

*) Доказательство прямой и обратной теоремы, которое мы здесь опускаем, можно найти в четвёртой главе нашей книжки «Деление с остатком в арифметике и алгебре» АПН РСФСР, М.— Л., 1949, где теория возвратных последовательностей изложена способом, отличным от принятого в этой брошюре.

сии удовлетворяют уравнению вида

$$u_{n+2}=2u_{n+1}-u_n,$$

квадраты натуральных чисел — уравнению

$$u_{n+3}=3u_{n+2}-3u_{n+1}+u_n,$$

а кубы — уравнению

$$u_{n+4}=4u_{n+3}-6u_{n+2}+4u_{n+1}-u_n.$$

Очевидно, что все эти уравнения содержатся как частные случаи в уравнении

$$u_{n+k}=C_k^{k-1}u_{n+k-1}-C_k^{k-2}u_{n+k-2}+\ldots+(-1)^{k-1}C_k^0u_n, \qquad (57')$$

рассмотренном в п. 9 (здесь $\alpha=1$).

Общий член любой последовательности, удовлетворяющей этому уравнению, должен иметь вид [формула (69)]:

$$u_n=B_0+B_1(n-1)+\ldots+B_{k-1}(n-1)^{k-1}. \qquad (69')$$

Чтобы найти коэффициенты B_0, B_1, ..., B_{k-1}, достаточно решить следующую систему k линейных алгебраических уравнений с k неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} B_0&=u_1,\\ B_0+B_1+\ldots+B_{k-1}&=u_2,\\ \ldots\ldots&\ldots\ldots\\ B_0+B_1(k-1)+\ldots+B_{k-1}(k-1)^{k-1}&=u_k. \end{aligned}\right\} \qquad (73)$$

В случае арифметической прогрессии $k=2$ и формула (69′) примет вид:

$$u_n=B_0+B_1(n-1),$$

а система (73) — вид:

$$B_0=u_1,$$
$$B_0+B_1=u_2.$$

Отсюда видно, что $B_0=u_1$ есть первый член прогрессии, а $B_1=u_2-u_1=d$ — разность прогрессии. Следовательно,

$$u_n=u_1+d(n-1).$$

Мы получили хорошо известную формулу.

Нет нужды производить соответствующие выкладки для случая последовательности квадратов или кубов натуральных чисел, так как мы с самого начала знаем здесь, что $u_n=n^2$, или $u_n = n^3$. Однако представляет некоторый интерес применить соотношения (69′) и (73) к выводу формул для суммы членов арифметической прогрессии, а также суммы квадратов или кубов натуральных чисел.

В п. 4 мы доказали, что если члены некоторой последовательности $\{u_n\}$ удовлетворяют уравнению вида

$$u_{n+k} = a_1 u_{n+k-1} + a_2 u_{n+k-2} + \ldots + a_k u_n,$$

то суммы $\{s_n\}$ членов этой последовательности ($s_1 = u_1$, $s_2 = u_1 + u_2$, $s_3 = u_1 + u_2 + u_3, \ldots$) удовлетворяют уравнению вида

$$s_{n+k+1} = (1 + a_1) s_{n+k} + (a_2 - a_1) s_{n+k-1} + \ldots + (a_k - a_{k-1}) s_{n+1} - a_k s_n.$$

В случае уравнения (57′) очевидно, что

$$a_1 = C_k^1,\ a_2 = -C_k^2, \ldots, a_k = (-1)^{k-1} C_k^k.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
1 + a_1 &= 1 + C_k^1 = C_{k+1}^1,\\
a_2 - a_1 &= -(C_k^2 + C_k^1) = -C_{k+1}^2,\\
a_3 - a_2 &= C_k^3 + C_k^2 = C_{k+1}^3,\\
a_k - a_{k-1} &= (-1)^{k-1}(C_k^k + C_k^{k-1}) = (-1)^{k-1} C_{k+1}^k,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
-a_k &= (-1)^k C_k^k = (-1)^k C_{k+1}^{k+1}
\end{aligned}$$

и уравнение для $\{s_n\}$ может быть представлено в виде:

$$s_{n+k+1} = C_{k+1}^1 s_{n+k} - C_{k+1}^2 s_{n+k-1} + \ldots + (-1)^k C_{k+1}^{k+1} s_n,$$

или

$$s_{n+k+1} - C_{k+1}^1 s_{n+k} + C_{k+1}^2 s_{n+k-1} - \ldots + (-1)^{k+1} C_{k+1}^{k+1} s_n = 0.$$

Итак, если последовательность $\{u_n\}$ удовлетворяет уравнению вида (57′) порядка k, то последовательность соответствующих сумм $\{s_n\}$ удовлетворяет уравнению того же вида, но порядка $k+1$. В частности, для арифметической прогрессии $k=2$, для последовательности квадратов натуральных чисел $k=3$ и для последовательности кубов $k=4$; следовательно, для последовательностей соответствующих сумм нужно в указанных выше равенствах (57′), (69′), (73) брать k на единицу бо́льшим: 3, 4 и 5.

а) Сумма членов арифметической прогрессии. На основании сделанных замечаний, s_n выражается по формуле (69') (с заменой u_n на s_n) при $k=3$. Следовательно,

$$s_n = B_0 + B_1(n-1) + B_2(n-1)^2.$$

Коэффициенты B_0, B_1, B_2 определяются из системы (73) (с той же заменой u_n на s_n и при $k=3$):

$$B_0 = s_1 = u_1,$$
$$B_0 + B_1 + B_2 = s_2 = u_1 + u_2 = 2u_1 + d,$$
$$B_0 + 2\cdot B_1 + 2^2 B_2 = s_3 = u_1 + u_2 + u_3 = 3u_1 + 3d.$$

Решая её, получаем:

$$B_0 = u_1,\ B_1 = u_1 + \frac{1}{2}d,\ B_2 = \frac{1}{2}d.$$

Следовательно,

$$s_n = u_1 + \left(u_1 + \frac{1}{2}d\right)(n-1) + \frac{1}{2}d(n-1)^2 =$$
$$= nu_1 + \frac{1}{2}d(n-1)n = \frac{n[2u_1 + (n-1)d]}{2} =$$
$$= \frac{n[u_1 + u_1 + (u-1)d]}{2} = \frac{n(u_1 + u_n)}{2}.$$

б) Сумма квадратов натуральных чисел. Беря в формулах (69') и (73) $k=4$ и заменяя u_n через s_n, получаем:

$$s_n = B_0 + B_1(n-1) + B_2(n-1)^2 + B_3(n-1)^3$$

и

$$B_0 = s_1 = 1,$$
$$B_0 + B_1 + B_2 + B_3 = s_2 = 1 + 2^2 = 5,$$
$$B_0 + 2B_1 + 4B_2 + 8B_3 = s_3 = 1 + 2^2 + 3^2 = 14,$$
$$B_0 + 3B_1 + 9B_2 + 27B_3 = s_4 = 1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30.$$

Из последней системы находим:

$$B_0 = 1,\ B_1 = 2\frac{1}{6},\ B_2 = 1\frac{1}{2},\ B_3 = \frac{1}{3}.$$

Поэтому

$$s_n = 1 + \frac{13}{6}(n-1) + \frac{3}{2}(n-1)^2 + \frac{1}{3}(n-1)^3 =$$
$$= \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{3}n^3 = \frac{n(1+3n+2n^2)}{6} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Мы получили знакомую формулу.

в) Сумма кубов натуральных чисел. Для неё имеем:

$$s_n = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Этот вывод мы предоставляем читателю в качестве упражнения.

В заключение рассмотрим ещё пример последовательности: a, $2a^2$, $3a^3, \ldots$, $na^n, \ldots$ $(a \neq 0,\ a \neq 1)$.

Здесь

$$u_n = na^n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Легко видеть, что

$$u_{n+2} = 2au_{n+1} - a^2u_n;$$

в самом деле

$$2au_{n+1} - a^2u_n = 2a(n+1)a^{n+1} - a^2na^n = (n+2)a^{n+2} = u_{n+2}.$$

Так как $k = 2$, $a_1 = 2a$ и $a_2 = -a^2$, то последовательность сумм $\{s_n\}$ $(s_1 = a,\ s_2 = a + 2a^2,\ s_3 = a + 2a^2 + 3a^3, \ldots)$ будет удовлетворять уравнению [см. (30)]:

$$s_{n+3} = (a_1 + 1)s_{n+2} + (a_2 - a_1)s_{n+1} - a_2s_n =$$
$$= (2a+1)s_{n+2} - (a^2+2a)s_{n+1} + a^2s_n.$$

Соответствующее характеристическое уравнение таково:

$$q^3 = (2a+1)q^2 - (a^2+2a)q + a^2.$$

Легко видеть, что оно удовлетворяется при $q = a$. Деля многочлен $q^3 - (2a+1)q^2 + (a^2+2a)q - a^2$ на $q - a$, получаем в частном:

$$q^2 - (a+1)q + a.$$

Следовательно, остальные два корня характеристического уравнения удовлетворяют следующему уравнению:

$$q^2 - (a+1)q + a = 0.$$

Эти корни суть: a и 1.

Итак, характеристическое уравнение имеет корень a кратности $a = 2$ и простой корень $\beta = 1$.

Поэтому для s_n получаем [см. формулу (69), где вместо u_n следует писать s_n, $a = a$, $Q(x) = B_0 + B_1x$ — многочлен первой степени, $\beta = 1$ и $R(x) = C_0$ — постоянная]:

$$s_n = [B_0 + B_1(n-1)]a^{n-1} + C_0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Коэффициенты B_0, B_1 и C_0 находятся из системы уравнений, соответствующих значениям $n=1$, 2 и 3:

$$B_0 + C_0 = s_1 = \alpha,$$
$$(B_0 + B_1)\alpha + C_0 = s_2 = \alpha + 2\alpha^2,$$
$$(B + 2B_1)\alpha^2 + C_0 = s_3 = \alpha + 2\alpha^2 + 3\alpha^3.$$

Отсюда находим:

$$B_0 = \frac{\alpha^3 - 2\alpha^2}{(\alpha-1)^2}, \qquad B_1 = \frac{\alpha^2}{\alpha - 1} \quad \text{и} \quad C_0 = \frac{\alpha}{(\alpha-1)^2}.$$

Следовательно,

$$s_n = [B_0 + B_1(n-1)]\alpha^{n-1} + C_0 = \frac{n\alpha^{n+2} - (n+1)\alpha^{n+1} + \alpha}{(\alpha-1)^2} =$$
$$= \frac{u_n\alpha^2 - (u_{n+1} - u_n)}{(\alpha-1)^2}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Эта книжка должна была дать читателю представление о разнообразии возвратных последовательностей и их роли в математике. Вместе с тем мы показали, что возвратные последовательности недалеко ушли от наиболее простых из них — геометрической прогрессии и последовательностей степеней натуральных чисел (в частности, последовательности самих натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию) — и могут быть выражены с помощью этих простейших последовательностей.

Но уже в элементарной математике на каждом шагу встречаются последовательности, не являющиеся возвратными. Такова, например, одна из наиболее важных во всей математической науке последовательность простых чисел:

$$2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\ 23,\ \ldots$$

Эта последовательность, с её глубокими и сложными свойствами, изучается в теории чисел.

Не являются возвратными также последовательности значений многих элементарных функций, например:

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \ldots,\ \frac{1}{n},\ \ldots$$

(последовательность значений функции $y=\frac{1}{x}$ при $x=1, 2, 3, \ldots$), или

$$1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3},\ \sqrt{4},\ \ldots,\sqrt{n},\ \ldots,$$
$$\log 1,\ \log 2,\ \log 3,\ \log 4,\ \ldots,\ \log n,\ \ldots$$

(последовательности значений функций $\sqrt{x}$ и $\log x$) и т. д.

Изучением этих и им подобных последовательностей*) (а вместе с ними и возвратных последовательностей) занимается упоминавшаяся выше математическая дисциплина — **исчисление конечных разностей.**

Наконец, в курсе элементарной математики и в особенности в курсе математического анализа, изучаемого в высшей школе, весьма важную роль играют сходящиеся последовательности, т. е. последовательности, обладающие конечными пределами. Их изучение составляет важнейшую задачу теории пределов и относится к основам **математического анализа.** Свойства отдельных членов последовательностей играют при этом более чем второстепенную роль: важен лишь факт существования предела и величина этого предела.

Все эти замечания мы считаем необходимым сделать для того, чтобы читатель понял, что изложенная нами теория возвратных последовательностей, как с точки зрения своего предмета, так и с точки зрения выявляемых ею закономерностей, представляет собой лишь весьма частную и скромную главу учения о последовательностях.

---

*) Речь идёт о последовательностях значений так называемых аналитических функций, простейшими представителями которых являются элементарные функции.

Редактор *А. З. Рывкин.*
Техн. редактор *М. Д. Кислиновская.*
Корректор *Н. Г. Зайцева.*

Подписано к печати 20/VII 1950 г. Т-05933. Бумага 84×108/32. 0,75 бум. л. 2,46 печ. л. 2,6. уч.-изд. л. 42 100 тип. зн. в печ. л. Цена книги 90 коп. Тираж 15 000 экз. Зак. № 711.

17-я тип. Главполиграфиздата
Москва, ул. 25 Октября, 5.

Цена 90 к.